

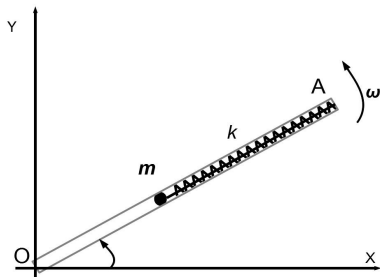
1. Βρείτε τα ολοκληρώματα της κίνησης, για τα συστήματα που περιγράφονται από τις ακόλουθες συναρτήσεις Lagrange:

$$(i) \quad L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + a y^4, \quad (ii) \quad L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \dot{y} t - x^2 y$$

$$(iii) \quad L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - a(x-y)^3, \quad (iv) \quad L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - a r^2 - b z^4$$

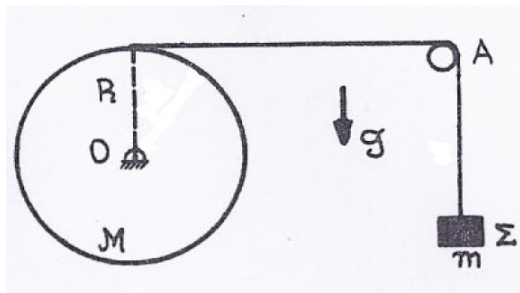
2. Υλικό σημείο κινείται στον τριδιάστατο χώρο και έστω $H = H(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$ η συνάρτηση Hamilton που περιγράφει την κίνησή του και $L_x = y p_z - z p_y$, $L_y = z p_x - x p_z$, $L_z = x p_y - y p_x$ οι τρεις συνιστώσες της στροφορμής του, όπου (p_x, p_y, p_z) οι συνιστώσες της ορμής. Να αποδειχθεί ότι, αν οι L_x και L_y είναι ολοκληρώματα της κίνησης, τότε και η τρίτη συνιστώσα, L_z , είναι επίσης ολοκλήρωμα της κίνησης.

3. Η μάζα m του σχήματος συνδέεται με ελατήριο σταθεράς k και φυσικού μήκους l_0 και είναι υποχρεωμένη να κινείται μέσα στον αβαρή στερεό σωλήνα OA, μήκους (OA)= b . Ο σωλήνας περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το σημείο O, κινούμενος πάντοτε στο οριζόντιο επίπεδο (Oxy). Το άκρο A του ελατηρίου είναι ακλόνητα συνδεδεμένο στο αντίστοιχο άκρο του σωλήνα. Να υπολογίσετε:



- (α) τη συνάρτηση Lagrange του συστήματος,
(β) τα ολοκληρώματα κίνησής του, και
(γ) τις συντεταγμένες όλων των θέσεων ισορροπίας του.

4. Ο ομογενής κύλινδρος του σχήματος έχει μάζα $M=2m$ και ακτίνα R και περιστρέφεται γύρω από τον ακλόνητο οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το O. Το σώμα Σ έχει μάζα m , κινείται αποκλειστικά κατά



την κατακόρυφη διεύθυνση και είναι κρεμασμένο από αβαρές και μη εκτατό νήμα το οποίο περνάει από τη μικρή ακλόνητη τροχαλία A και τυλίγεται στον κύλινδρο. Το σύστημα βρίσκεται υπό την επίδραση ομογενούς βαρυτικού πεδίου g . Θεωρώντας την ενέργεια της τροχαλίας A αμελητέα, να υπολογίσετε:

- (α) τη συνάρτηση Lagrange του συστήματος,
(β) τη συνάρτηση Hamilton του συστήματος, και
(γ) το χρόνο που χρειάζεται το σώμα Σ για να διανύσει κατακόρυφη απόσταση h , ξεκινώντας από την ηρεμία.

- Διάρκεια εξέτασεων: 2.5 ώρες

- Βαθμολογία: Θέματα (1) και (2) από **2 μονάδες**, Θέματα (3) και (4) από **3 μονάδες**

- Δίνονται: $T = \frac{1}{2} m v_0^2 + \vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times m \vec{r}_K) + \frac{1}{2} J \omega^2$, $J' = J + m \delta^2$

- Ροπή αδρανείας ομογενούς δίσκου μάζας M και ακτίνας R , ως προς το κέντρο μάζας: $J_K = MR^2/2$